[科技史与科技传播研究]

京房六十律及其算法解析

罗见今
（内蒙古师范大学 科学技术史研究院，内蒙古 呼和浩特 010022）

摘 要：用三分损益法确定十二律在中国古代音乐史上是一重要课题，也是古代数学的重要应用。解析十二律的3种黄钟初值3^0、3^4、3^{11}，将十二律算法表示成统一的通项公式。《后汉书·律历志》用大篇幅精确记载京房（前77—前37）所创六十律，据此列出5个表，考释这些记录，解析六十律的构造方法和计算精度，指出京房六十律是5种比例不等的十二律的叠加。

关键词：三分损益法；十二律通项公式；黄钟大数；京房六十律；中国古代音乐；音律
中图分类号：J609.2；J612.1 **文献标识码**： A **文章编号**：1672-2914（2015）02-0001-06

An Analysis on the Algorithm of the Sixty Musical Scales Created by Jing Fang(77BC—37BC)

LUO Jianjin
(Institute for the History of Science and Technology, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, Inner Mongolia,China)

Abstract: Using the method of Sanfen Sunyi(三分损益法) to identify twelve musical scales is an important issue both in the music history and science history in ancient China. This paper analyzes three kinds Huang Zhong initials(黄钟初值) of the twelve scales, i.e. 3^0, 3^4, 3^{11}, and presents algorithm in a general formula of the twelve scales. In history of *the Later Han Dynasty——Musical Scales and Calendar*, the sixty musical scales created by Jing Fang (京房, 77BC—37BC) were accurately documented with great length. Based on these historical records, this paper lists 5 tables (totaling 560 pieces of information), makes textual explanations to these records, and details the constructing methods and calculation accuracy of these sixty scales. The paper concludes that the sixty scales created by Jing Fang are superposition of five kinds of twelve scales which proportions are different.

Key words: the method of Sanfen Sunyi; the formula for twelve musical scales; the big numbers of Huang Zhong; the sixty musical scales created by Jing Fang; ancient Chinese music; tonality

中国古人重视音乐，五千年前，舜帝大典，韶乐在先；六经（《易》《诗》《书》《礼》《乐》《春秋》）之中，乐经在列，所惜失传；六艺（礼、乐、射、御、书、数）之中，乐在礼后，举足轻重。由于音乐在祭祀、典礼、战争、生活中的重要性，律吕学说被视为神圣的理论，《史记》称为“万事根本”[1]1331，提升到阴阳五行哲学观念的高度，它又与被称为精密科学的数学、物理学、天文学知识密切关联。所以我们说，中国古代的律学属于早期精密科学。

司马迁说：“钟律调自上古。”[1]1345古乐音阶先是宫商角徵羽，继而发展为十二律，“早在公元前六世纪，十二律就用来调节乐音”[2]33。在《管子·地员》《吕氏春秋·音律》《淮南子·天文训》《史记·律书》《汉书·律历志》等典籍中有不少关于十二律的记录和论述。1986年甘肃天水放马滩秦墓出土战国晚期简牍461枚，2009年整理出版[3]。其中乙种《日书》的13枚竹简记录有十二律的数据，已有多篇研究[4-5]。

科学史家李约瑟[6]、程贞一等按照声学原理和现

收稿日期：2015-01-25
作者简介：罗见今(1942-)，男，河南新野县人，内蒙古师范大学科学技术史研究院教授，博士生导师，研究方向为数学史。

代乐理对十二律多有研究，特别是在《黄钟大吕——中国古代和十六世纪声学成就》中，指出“三分损益律制是世界上现存的最早用五度生律而没有音差的十二律体系”，并用较大篇幅论证西方学者有关评论的诸多错误[2]。

从数学上看，三分损益法是为制定音律创造的一种递推方法，其结果获得了黄钟音阶级数，与现代十二音阶十分接近，这是对早期音乐理论的天才贡献。此法产生的时代远早于成书于两汉之交的《九章算术》，追踪其算法和计算精度的演变，也是数学史感兴趣的课题。

为获得统一的音阶，首先要规定一标准音，并依照按三分损益法调控管长，推算出其余一系列音阶。诸本所载，宫音管长8寸1分，或81寸，不考虑单位就是81，在《淮南子》里叫作“黄钟之数”[7]。

汉元帝时有位易学家京房（前77—前37），“长于灾变，分六十四卦，更直日用事，以风雨寒温为候：各有占验。房用之尤精。好钟律，知音声。”[1]1390京房在科学史上有贡献，如较早观察太阳描写日珥、日冕；他对音律也颇有研究。京房按阴阳五行的理论将干支、历法、十二律等都与八卦建立起对应关系，形成一个哲学体系。特别是他建立了六十音律，在中国音乐史上留有记录[8]。

《后汉书·律历志》[1]1453—1478详述了京房的成果及相关历史，这在音乐史、数学史上都是重要的资料。音乐方面近年多有研究，见逯璐[9]、陈应时[10-12]、谷杰[13]等。

本文将主要依据《后汉书》的记载，并参照放马滩出土律书和《史记》《汉书》有关内容，集中探讨六十律中的数学问题。

本文从科学史的视角，用数学方法解析十二律算法，阐明黄钟的3个初始条件即十二律的3个求值途径，将其方法表示成统一的通项公式。本文据《后汉书》列出5个表格，分段解析六十律，逐一核验该书记录的精确程度；指出京房以十二律大数为基础，推衍出其他4个十二律，均可视为等比例缩小的产物，六十律的数值也可由统一的通项公式分段求出。

1 十二律的算法和通项公式

递求十二律从来就是一个重要的工作。方法上既有上生、下生，结果又有阴、阳之分，还内涵五行；将各个律名与十二地支、与一年十二个月、进而与二十四节气相联系，赋予该级数大量附加意义。黄钟与十一月对应，以后随月份的递增而十二律的数值递减。自古以来，律历并称，音乐与历法的结合，成为中国古代科学文化的特点之一。

古人探索“调律”，发明旋宫原理，《管子·地员》推算五声音阶，《吕氏春秋·音律》导生半音音阶[2]32-45，均有杰出成就。为构造十二律，他们找到3种途径，其一，设“黄钟之数”管长3^4=81，这种思想根深蒂固，诸本皆有论述；其二，设黄钟管长3^0=1，各律均不大于1，见于《史记》“生钟分”[1]1342；其三，设管长3^{11}=177 147，即放马滩秦墓简牍中“律书”之例[3]，在《淮南子》里叫作“黄钟大数”[7]。从数学上看，这在实际上是对三分损益法设定的3个初始值。

用黄钟合于九九、即81为首项，可用三分损益法得出各律的精确值，后世多有阐述。设十二律依次为a_n（n为项数）：

黄钟 $a_1= a_1 =2^0\cdot 3^4=81.000\ 0$

林钟 $a_2=2a_1/3 =2^1\cdot 3^3=54.000\ 0$

太簇 $a_3=4a_2/3 =2^3\cdot 3^2=72.000\ 0$

南吕 $a_4=2a_3/3 =2^4\cdot 3^1=48.000\ 0$

姑洗 $a_5=4a_4/3 =2^6\cdot 3^0=64.000\ 0$

应钟 $a_6=2a_5/3 =2^7\cdot 3^{-1}=42.666\ 7$

蕤宾 $a_7=4a_6/3 =2^9\cdot 3^{-2}=56.888\ 9$

大吕 $a_8=4a_7/3=2^{11}\cdot 3^{-3}=75.851\ 9$

夷则 $a_9=2a_8/3=2^{12}\cdot 3^{-4} =50.567\ 9$

夹钟 $a_{10}=4a_9/3=2^{14}\cdot 3^{-5}=67.423\ 9$

无射 $a_{11}=2a_{10}/3=2^{15}\cdot 3^{-6}=44.949\ 2$

仲吕 $a_{12}=4a_{11}/3=2^{17}\cdot 3^{-7}=59.932\ 3$

求各律是一个递推过程，式中上生、下生系数分别为4和2。从a_2开始，逐次把前项的值代入后项，获得第2个等号后的算式，看出实际上是在作2与3的幂积运算，结果呈现明显的规律性。由于“三分损一”与“三分益一”交替进行，所得既非等差级数，亦非等比级数，而是2的升幂与3的降幂（对应值）之积，形成的级数是摆动的，可在坐标上绘出它的图像。但注意到从a_7分成两段，前6项（$a_2\to a_7$）先损后益，后5项（$a_8\to a_{12}$）先益后损。

求十二律必须做递归运算，欲知级数中任意一项，都须从头用递推法算起。本文的问题是：能否将上述递归运算转化为一步求解的公式？

从应钟到蕤宾（$a_6\to a_7$）和从蕤宾到大吕（$a_7\to a_8$）连续两步，都是“三分益一”，因此须将n分为两段：$1\le n\le 7$和$8\le n\le 12$。下面式中的“[ ]”是取整符号，①于是得到各律的通项公式（分析、推导过程从略）为：

$$a_n=2^{n+[(n+1)/2]-2}\cdot 3^{5-n}\quad（当1\le n\le 7时）\qquad(1a)$$

$$a_n=2^{n+[n/2]-1}\cdot 3^{5-n}\quad（当8\le n\le 12时）\qquad(1b)$$

经过试值，不难看出式（1）的结果与三分损益法递推的精确结果完全一致，并且不包含其他任何值，因此，该式是十二律正确的通项公式。

①取整符号(高斯符号)[α]表示不大于α的最大整数。例如[3/2]=1，[−3/2]=−2，[π]=3，[−π]=−4，等。

2 《后汉书》记载的六十律及其分析

司马彪在《续汉书·志第一·律历上》[1]的"律准候气"篇内,用一卷的篇幅记载京房的成果及相关历史,在中华书局《历代天文律历等志汇编》五中,连同校勘记,共有24页(第1 453~1 478页)。"律准 候气"记有京房一段话作为提纲:

> 中吕上生执始,执始下生去灭,上下相生,终于南事,六十律毕矣。夫十二律之变至于六十,犹八卦之变至于六十四也。

从该书的记录看,他选用的音律首数是"黄钟大数",即3^{11}=177 147,第1组所求出的十二律大数,都与放马滩秦墓竹简"律书"完全相合。这些竹简属战国晚期,要比京房的研究早约两个世纪。因此,京房所得第1组十二律在当时是众所周知的:

黄钟a_1=177 147 =$2^0\cdot3^{11}$, 林钟a_2=118 098 =$2^1\cdot3^{10}$,
太簇a_3=157 464 =$2^3\cdot3^9$, 南吕a_4=104 976 =$2^4\cdot3^8$,
姑洗a_5=139 968 =$2^6\cdot3^7$, 应钟a_6= 93 312 =$2^7\cdot3^6$,
蕤宾a_7 =124 416 =$2^9\cdot3^5$, 大吕a_8=165 888=$2^{11}\cdot3^4$,
夷则a_9=110 592 =$2^{12}\cdot3^3$, 夹钟a_{10}=147 456=$2^{14}\cdot3^2$,
无射a_{11}= 98 304 =$2^{15}\cdot3^1$, 仲吕a_{12}=131 072=$2^{17}\cdot3^0$。

这是按照生律的顺序排列,而在放马滩秦简和《后汉书》中,均按照律值大小排序。

由此,第1组求出最后的仲吕为a_{12}=131 072=2^{17},按照生律的理论,算出仲吕后,再三分损一,得到87 381.333 3。今天看来,最好能求出黄钟3^{11}长度之半,乐理上便可获高八度音,实际算出的这个结果偏少1.35%。京房是怎样考虑的姑且不论,他自己说要模仿周易从八卦推演到六十四卦,便用三分损益法继续推算,创"六十律相生之法"。除上述十二律外,所推出的四十八律分为4组,可注意以下几点。

(1)京房选用"上生"作为第2组十二律的开始,而且以后每组十二律均以"上生"开始;这使得每组之首均具有该组中类似黄钟的地位。

第13律执始:$2^{19}\cdot3^{-1}$=174 762.666 7,
第37律分动:$2^{57}\cdot3^{-25}$=170 089.844 0,
第25律丙盛:$2^{38}\cdot3^{-13}$=172 410.425 6,
第49律质未:$2^{76}\cdot3^{-37}$=167 800.498 2。

(2)第2~5组每组下生与上生的交替与第1组保持一致,序列为:下上下上下上;上下上下上,使得每组的十二律都与十二律大数成比例。仅第5组色育为例外,详见下文。

由于每求一次三分损益都要除以3,故分母3的指数以自然数递增;而从每组的第2律起,分子2的指数在首律分子的基础上依次扩大2^1、2^3、2^4、2^6、2^7、2^9、2^{11}、2^{12}、2^{14}、2^{15}、2^{17}倍。这个序列实际上是用三分损益法求出的十二律的标志。

(3)第2~5组每组实际上均可视作一独立的十二律。单独来看,其作用与生钟分、黄钟十二律、十二律大数没有什么不同,其首数均可视为黄钟初值,即京房实际上增添了执始、分动、丙盛、质未4个初始值。

(4)当他把六十律都推算出来之后,又将各律按数值大小重新排列。后人看到的,就是这种排法的结果。《后汉书》将排算过程记录在每律后的说明之中。本文恢复京房计算的过程,指出仲吕之后共4个十二律,其实都是原律等比例缩小的产物。

(5)《后汉书》所载京房六十律的数值全取整数,总体而言比较精确,但除前十二律外全部是近似值,即省略了小数部分;按四舍五入考量,他计算正确的有26个。由于三分损益递归运算误差积累,包括钱

表1 生律分数、十二律数、十二律大数(即京房六十律中第1十二律)比较

生序	生法	律名	值序	生律分数	算法	十二律数	算法	十二律大数	算法
1	上生	黄钟	1/1	1	$2^0\cdot3^0$	81	$2^0\cdot3^4$	177 147	$2^0\cdot3^{11}$
2	下生	林钟	8/36	0.666 667	$2^1\cdot3^{-1}$	54	$2^1\cdot3^3$	118 098	$2^1\cdot3^{10}$
3	上生	太簇	3/11	0.888 889	$2^3\cdot3^{-2}$	72	$2^3\cdot3^2$	157 464	$2^3\cdot3^9$
4	下生	南吕	10/46	0.592 593	$2^4\cdot3^{-3}$	48	$2^4\cdot3^1$	104 976	$2^4\cdot3^8$
5	上生	姑洗	5/21	0.790 123	$2^6\cdot3^{-4}$	64	$2^6\cdot3^0$	139 968	$2^6\cdot3^7$
6	下生	应钟	12/56	0.526 749	$2^7\cdot3^{-5}$	42.666 7	$2^7\cdot3^{-1}$	93 312	$2^7\cdot3^6$
7	上生	蕤宾	7/31	0.702 332	$2^9\cdot3^{-6}$	56.888 9	$2^9\cdot3^{-2}$	124 416	$2^9\cdot3^5$
8	上生	大吕	2/7	0.936 443	$2^{11}\cdot3^{-7}$	75.851 9	$2^{11}\cdot3^{-3}$	165 188	$2^{11}\cdot3^4$
9	下生	夷则	9/42	0.624 295	$2^{12}\cdot3^{-8}$	50.567 9	$2^{12}\cdot3^{-4}$	110 592	$2^{12}\cdot3^3$
10	上生	夹钟	4/17	0.832 393	$2^{14}\cdot3^{-9}$	67.423 9	$2^{14}\cdot3^{-5}$	147 456	$2^{14}\cdot3^2$
11	下生	无射	11/52	0.554 929	$2^{15}\cdot3^{-10}$	44.949 2	$2^{15}\cdot3^{-6}$	98 304	$2^{15}\cdot3^1$
12	上生	仲吕	6/27	0.739 905	$2^{17}\cdot3^{-11}$	59.932 3	$2^{17}\cdot3^{-7}$	131 072	$2^{17}\cdot3^0$

大昕等注释者的修正亦有误差，均见表1–5。

3 京房六十律的算法、数值与计算精度

表1–5中栏目名称表示如下：①生序：计算音律先后之顺序。②生法：应用三分损益生律之法，上生即乘4/3,下生即乘2/3。③值序：表1的值序分两种：前者是在十二律中按律值大小排列的顺序，后者是《后汉书》所列六十律按律值大小排列的顺序；表2–5的值序均指后者。

表1提供的数据和算法清楚显示出三分损益法的特点。

(1)“生钟分”首数3^0=1、黄钟首数3^4=81和黄钟大数3^{11}=177 147是三分损益法的3个初始值，只要相应调整通项公式(1a)(1b)中3的指数，就可获得另两个十二律公式。

(2)“生律分数”栏所列小数根据《史记》“生钟分”，表1对原有上生下生顺序从大吕起做了调整；其实表1第6栏算法所列正是《史记》给出的分数。

(3)“十二律大数”指以黄钟大数起首的十二律数值。十二律大数12个值最早的文献见之于放马滩秦简“律书”[3],京房六十律的第1十二律与它完全吻合。

(4)表1的3种算法中2的幂序列皆同；3的幂均呈降幂排列，只是首项3的幂分别为3^0,3^4和3^{11}。由此确知三分损益法入选的首项不唯一，所得皆为十二律。

以下第2–5表的栏目除表1的说明①②③之外，

表2 京房六十律内含第2十二律

生序	生法	律名	数值	值序	修正	确值	算法	修正说明	误差
13	上生	执始	174 762	3	174 763	174 762.666 7	$2^{19}3^{-1}$	本文改	−0.67
14	下生	去灭	116 508	38	—	116 508.444 4	$2^{20}\cdot 3^{-2}$		
15	上生	时息	155 344	13	155 345	155 344.592 6	$2^{22}\cdot 3^{-3}$	本文改	−0.59
16	下生	结躬	103 563	48	—	103 563.061 7	$2^{23}\cdot 3^{-4}$		
17	上生	变虞	138 084	23	—	138 084.082 3	$2^{25}\cdot 3^{-5}$		
18	下生	迟内	92 056	58	—	92 056.054 9	$2^{26}\cdot 3^{-6}$		
19	上生	盛变	122 741	33	—	122 741.406 5	$2^{28}\cdot 3^{-7}$		
20	上生	分否	163 654	8	—	163 654.208 7	$2^{30}\cdot 3^{-8}$		
21	下生	解形	119 103	43	109 103	109 103.472 4	$2^{31}\cdot 3^{-9}$	钱大昕、卢文弨改	印误
22	上生	开时	145 470	18	145 471	145 471.129 7	$2^{33}\cdot 3^{-10}$	本文改	−1.10
23	下生	闭掩	96 980	53	96 981	96 980.864 4	$2^{34}\cdot 3^{-11}$	本文改	−0.86
24	上生	南中	129 308	28	—	129 307.819 2	$2^{36}\cdot 3^{-12}$		

表3 京房六十律内含第3十二律

生序	生法	律名	数值	值序	修正	确值	算法	修正说明	误差
25	上生	丙盛	172 410	4	—	172 410.425 6	$2^{38}\cdot 3^{-13}$		
26	下生	安度	114 940	39	—	114 940.283 7	$2^{39}\cdot 3^{-14}$		
27	上生	屈齐	153 253	14	153 254	153 253.711 6	$2^{41}\cdot 3^{-15}$	本文改	−0.71
28	下生	归期	102 169	49	—	102 169.141 1	$2^{42}\cdot 3^{-16}$		
29	上生	路时	136 225	24	136 226	136 225.511 1	$2^{44}\cdot 3^{-17}$	本文改	−0.51
30	下生	未育	90 817	59	—	90 817.013 9	$2^{45}\cdot 3^{-18}$		
31	上生	离宫	121 819	34	121 089	121 089.351 8	$2^{47}\cdot 3^{-19}$	钱大昕、卢文弨改	印误
32	上生	凌阴	161 452	9	—	161 452.469 1	$2^{49}\cdot 3^{-20}$		
33	下生	去南	107 635	44	—	107 634.979 4	$2^{50}\cdot 3^{-21}$		
34	上生	族嘉	143 513	19	—	143 513.305 9	$2^{52}\cdot 3^{-22}$		
35	下生	邻齐	95 675	54	95 676	95 675.537 2	$2^{53}\cdot 3^{-23}$	本文改	−0.54
36	上生	内负	127 567	29	—	127 567.383 0	$2^{55}\cdot 3^{-24}$		

表4　京房六十律内含第4十二律

生序	生法	律名	数值	值序	修正	确值	算法	修正说明	误差
37	上生	分动	170 089	5	170 090	170 089.844 0	$2^{57}\cdot3^{-25}$	本文改	−0.84
38	下生	归嘉	113 393	40	—	113 393.229 3	$2^{58}\cdot3^{-26}$		
39	上生	随期	151 190	15	151 191	151 190.972 4	$2^{60}\cdot3^{-27}$	本文改	−0.97
40	下生	未卯	100 794	50	—	100 793.981 6	$2^{61}\cdot3^{-28}$		
41	上生	形始	134 392	25	—	134 391.975 5	$2^{63}\cdot3^{-29}$		
42	下生	迟时	89 595	60	—	89 594.650 8	$2^{64}\cdot3^{-30}$		
43	上生	制时	119 460	35	—	119 459.534 3	$2^{66}\cdot3^{-31}$		
44	上生	少出	159 280	10	159 279	159 279.379 1	$2^{68}\cdot3^{-32}$	本文改	
45	下生	分积	106 188	45	106 186	106 186.252 7	$2^{69}\cdot3^{-33}$	钱大昕改尾为7	+1.75
46	上生	争南	141 582	20	—	141 581.670 3	$2^{71}\cdot3^{-34}$		
47	下生	期保	94 388	55	—	94 387.780 2	$2^{72}\cdot3^{-35}$		
48	上生	物应	125 850	30	—	125 850.373 6	$2^{74}\cdot3^{-36}$		

表5　京房六十律内含第5十二律

生序	生法	律名	数值	值序	修正	确值	算法	修正说明	误差
49	上生	质未	167 800	6	—	167 800.498 2	$2^{76}\cdot3^{-37}$		
50	下生	否与	111 867	41	—	111 866.998 8	$2^{77}\cdot3^{-38}$		
51	上生	形晋	149 155	16	149 156	149 155.998 4	$2^{79}\cdot3^{-39}$	卢文弨改尾为6	−1.00
52	下生	夷汗	99 437	51	—	99 437.332 2	$2^{80}\cdot3^{-40}$		
53	上生	依行	132 582	26	132 583	132 583.109 7	$2^{82}\cdot3^{-41}$	本文改	−1.11
54	上生	色育	176 776	2	176 777	176 777.479 5	$2^{84}\cdot3^{-42}$	本文改	−1.48
55	下生	谦待	117 851	37	117 852	117 851.653 0	$2^{85}\cdot3^{-43}$	本文改	−0.65
56	上生	未知	157 134	12	157 135	157 135.537 4	$2^{87}\cdot3^{-44}$	本文改	−1.54
57	下生	白吕	104 756	47	104 757	104 757.024 9	$2^{88}\cdot3^{-45}$	本文改	−1.00
58	上生	南授	139 670	22	139 676	139 676.033 2	$2^{90}\cdot3^{-46}$	钱大昕加尾4	−6.00
59	下生	分乌	93 117	57	—	93 117.355 5	$2^{91}\cdot3^{-47}$	钱大昕改尾6	
60	上生	南事	124 154	32	124 156	124 156.474 0	$2^{93}\cdot3^{-48}$	本文改	−2.47

还有:④数值:《后汉书》所列六十律之值。⑤值序:《后汉书》所列六十律按律值大小排列的顺序。⑥修正:对《后汉书》律值的修正,原文正确的标以"—"号。⑦确值:本文给出的精确值(给出10位有效数字)。⑧算法:本文给出的公式,据此可算出确值。⑨误差:《后汉书》原文与确值间的绝对误差。

(5)上列5表中,上生和下生的序列基本一致,只有第54律色育1个例外。由于京房在生律的第53步本应从依行$2^{82}\cdot3^{-41}$下生色育,却改为上生色育$2^{84}\cdot3^{-42}$,此后下生上生相间至终,由此造成六十律中唯一的变化,即色育的数值与前4组每组第6律不成比例。

京房何以作此"变律",易学家和乐理家有不同解释,此不赘言。

(6)比较上列5表中5个十二律的数量关系,可知它们互呈比例:

表2为第2十二律,可由第1十二律各乘0.986 540 37($=2^{19}3^{-12}$)而得;

表3为第3十二律,可由第1十二律各乘0.973 261 90($=2^{38}3^{-24}$)而得;

表4为第4十二律,可由第1十二律各乘0.960 162 15($=2^{57}3^{-36}$)而得;

表5为第5十二律,可由第1十二律各乘0.947 238 72($=2^{76}3^{-48}$)而得。

易于得知,各表之间皆可乘以放大或缩小的系

数实现互求。

（7）第60律为南事$2^{93}\cdot 3^{-48}$，所谓“南事穷”，“下不生”。为什么算到第60律后不再继续算下去了呢？按照京房自己的说法，从十二律扩展到六十律，就像推衍八卦成六十四卦一样。但从数学上看，八卦推衍到六十四卦应用将下卦、上卦视为两类元素的有重排列$(2^3)^2$，与京房选用三分损益法屡求十二律立意有别。一般认为京房的做法是为了附会周易。

4 京房六十律分段计算公式

分数或奇零之数（汉时不叫小数）在实际运用中有不便之处，可以放大，没有长度的限制，成为抽象的数值，这就是所谓“黄钟大数”和“十二律大数”。在放马滩秦简“律书”和京房六十律的第1十二律里，人们看到的正是这种放大的数值。

各律的“生序”按照生成的先后而定，是一种递推序列；黄钟大吕的排法将阴阳交织起来，显见为交错排列。表1十二律大数的“算法”是按照算术基本定理给出其素数（质因数）的唯一分解式，其规律性历历在目，这里仍然仿照公式（1）来归纳其通项公式。

于是获得分成两段的第1十二律求值通项公式为（推导从略）：

$$a_n=2^{n+[(n+1)/2]-2}\cdot 3^{12-n}\quad（当1\le n\le 7时）\qquad (2a)$$

$$a_n=2^{n+[n/2]-1}\cdot 3^{12-n}\quad（当8\le n\le 12时）\qquad (2b)$$

经过试值，不难看出式（2）的结果与十二律大数的记录完全一致，并且不包含其他任何值，因此，这是京房第1十二律的正确的通项公式。

比较式（1）和（2），其区别仅在于3的指数，后者是前者的3^7=2 187倍。同样地，对于第2–5表，我们也可调整公式（2）中3的指数，易于获得六十律的另4个公式（其中仅将第54律色育作为例外），此不赘述。

综上可知：京房六十律是5种比例不等的十二律的推衍和叠加。无论京房的用意何在，也无论从易学或乐理上给予何种解释和评价，从数学上看，就其结果必然导出这样的结论，可供对音乐史感兴趣者参考，也可从中看出古代数学的应用。

对京房六十律的评价，在杨荫浏1962年著、1980年再版的《中国古代音乐史稿》中基本持否定意见[14]：“并没有发明什么律的新的计算方法”，“导向了唯心的乐律神秘主义”。而在孙继南、周柱铨的《中国音乐通史简编》中指出它“显示了律学思维的精微性”，“出现了五十三平均律的计算成果，这是前所未有的。”[15]近年陈应时接连发表文章，为六十律申辩、再辩、三辩[10-12]，引起了更多的兴趣。

但无论如何，京房的确设计了一个精巧的音乐—数字系统，在两千多年里吸引了一代又一代学者。

参考文献：

[1]中华书局编辑部.历代天文律历等志汇编（五）[M].北京：中华书局，1976.

[2]程贞一.黄钟大吕——中国古代和十六世纪声学成就[M].王翼勋，译.上海：上海科技教育出版社，2007.

[3]甘肃省文物考古研究所.天水放马滩秦简[M].北京：中华书局，2009：96–97.

[4]谷杰.从放马滩秦简《律书》再论《吕氏春秋》生律次序[J].音乐研究，2005（3）：29–34.

[5]陈应时.再谈《吕氏春秋》的生律法——兼评“从放马滩秦简《律书》再论《吕氏春秋》生律次序”[J].音乐研究，2005（4）：39–46.

[6]NEEDHAM J. Science and civilisation in China(Vol1) [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1962.

[7]张双棣.淮南子校释[M].北京：北京大学出版社，1997.

[8]李纯一.中国古代音乐史稿：第1分册[M].北京：人民音乐出版社，1998.

[9]逯璐.京房六十律研究综述[J].黄河之声，2007（10）：112–115.

[10]陈应时.“京房六十律”中的三种音差[J].中国音乐，2007（1）：34–37.

[11]陈应时.“京房六十律”三辩[J].黄钟(武汉音乐学院学报)，2010（2）：113–120.

[12]陈应时.解读“京房六十律”的律数[J].文化艺术研究，2012（1）：55–66.

[13]谷杰.京房六十律的蕤宾之“重上”、色育之“违例”——《五经算术》中的京房六十律[J].天津音乐学院学报，2009（4）：44–50.

[14]杨荫浏.中国古代音乐史稿：上册[M].北京：人民音乐出版社，1980：131–132.

[15]孙继南.周柱铨.中国音乐通史简编[M].济南：山东教育出版社，1993：69.